11 класс

Задача 1. Некто выложил по кругу 2019 карточек. Известно, что среди любых трёх подряд идущих карточек есть по меньшей мере две желтые, а среди любых пяти подряд идущих карточек есть по меньшей мере одна красная. Может ли среди этих карточек присутствовать зелёная?

Задача 2. Докажите, что при всех значениях параметра a расстояние между корнями квадратного уравнения

$$x^2 + (2a+1)x + (a^2 + a) = 0$$

одно и то же.

Задача 3. В Учёном Совете состоит 19 профессоров. Однажды каждый из них написал письма 9 членам совета. После этого оказалось, что каждый получил ровно 9 таких писем. Могло ли оказаться, что никакие два учёных не написали друг другу?

Задача 4. Натуральное число называется *свободным от кубов*, если ни один из его делителей не является кубом натурального числа, большего единицы. Оля написала на доске 7000 свободных от кубов чисел. Докажите, что по меньшей мере одно из этих чисел имеет простой делитель, больший 20.

Задача 5. Внутри треугольника ABC отметили точку P. Луч BP пересекает описанную окружность треугольника в точке R, а луч CP — в точке Q. На стороне AC отметили точку N так, что $\angle CPN = \angle BAQ$. Докажите, что $\angle CRN = \angle BAP$.

Задача 6. Средним геометрическим n натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется величина

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

При каком наибольшем натуральном n среднее геометрическое n различных натуральных чисел, не превосходящих 10, может оказаться натуральным числом?

За полное решение каждой задачи дается 7 баллов.

Всероссийская олимпиада школьников по математике

11 класс

Задача 1. Некто выложил по кругу 2019 карточек. Известно, что среди любых трёх подряд идущих карточек есть по меньшей мере две желтые, а среди любых пяти подряд идущих карточек есть по меньшей мере одна красная. Может ли среди этих карточек присутствовать зелёная?

Задача 2. Докажите, что при всех значениях параметра a расстояние между корнями квадратного уравнения

$$x^2 + (2a+1)x + (a^2 + a) = 0$$

одно и то же.

Задача 3. В Учёном Совете состоит 19 профессоров. Однажды каждый из них написал письма 9 членам совета. После этого оказалось, что каждый получил ровно 9 таких писем. Могло ли оказаться, что никакие два учёных не написали друг другу?

Задача 4. Натуральное число называется *свободным от кубов*, если ни один из его делителей не является кубом натурального числа, большего единицы. Оля написала на доске 7000 свободных от кубов чисел. Докажите, что по меньшей мере одно из этих чисел имеет простой делитель, больший 20.

Задача 5. Внутри треугольника ABC отметили точку P. Луч BP пересекает описанную окружность треугольника в точке R, а луч CP — в точке Q. На стороне AC отметили точку N так, что $\angle CPN = \angle BAQ$. Докажите, что $\angle CRN = \angle BAP$.

Задача 6. Средним геометрическим n натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется величина

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

При каком наибольшем натуральном n среднее геометрическое n различных натуральных чисел, не превосходящих 10, может оказаться натуральным числом?

За полное решение каждой задачи дается 7 баллов.