Всероссийская олимпиада школьников по математике

10 класс

Задача 1. Андрей и Борис бегают по круговой дорожке, причём Андрей бежит по часовой стрелке, а Борис — против. Если Андрей увеличит свою скорость в три раза, мальчики начнут встречаться в полтора раза чаще. Во сколько раз чаще они станут встречаться, если свою скорость увеличит в три раза Борис?

Ответ: В 2,5 раза.

Решение. Пусть изначальная скорость Андрея равна x, а скорость Бориса равна y. Если мальчики начали встречаться в полтора раза чаще, значит, их скорость сближения увеличилась в полтора раза, т. е.

$$3x + y = 1{,}5(x + y);$$

$$6x + 2y = 3x + 3y;$$

$$y = 3x.$$

Значит, изначально скорость сближения Андрея и Бориса была равна $4x$. Если Борис в три раза увеличит свою скорость, то скорость сближения будет равна $3 \cdot 3x + x = 10x$. Тогда мальчики станут встречаться в $\frac{10x}{4x} = 2{,}5$ раза чаще. □

Критерии

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

3 б. Доказано, что скорость Бориса в три раза больше скорости Андрея.

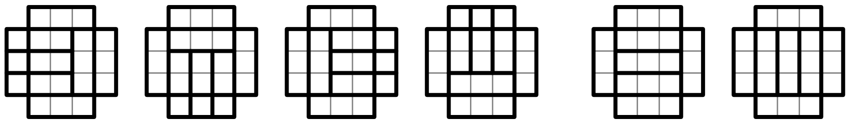
2 б. Приведён верный ответ, но отсутствует обоснование.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 2. Из квадрата 5×5 вырезали четыре угловые клетки. Сколько существует способов разрезать оставшуюся фигуру на прямоугольники 1×3?

Ответ: 6.

Решение. Рассмотрим три клетки, примыкающие к одной стороне квадрата. Если каждая из них принадлежит отдельному прямоугольнику 1×3, то это однозначно задает разбиение. Учитывая, что сторон четыре, то таких разбиений тоже четыре.



Если же у всех сторон все такие клетки объединены в прямоугольники, примыкающие к сторонам квадрата, то остаётся только разрезать центральный квадрат 3×3 на прямоугольники. Есть два варианта, как это можно сделать. □

Критерии

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

4 б. Нарисованы все примеры разбиений, но отсутствует обоснование, что других разбиений нет.

2 б. Приведён верный ответ, но отсутствует обоснование.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 3. Число называется палиндромом, если оно совпадает с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке. Сколько существует четырёхзначных чисел-палиндромов, делящихся на 15?

Ответ: 3.

Решение. Поскольку число делится на 5, оно должно оканчиваться либо нулём, либо пятеркой. Но число-палиндром начинается на ту же цифру, которой оканчивается, поэтому на конце не может стоять ноль. Итак, число начинается и оканчивается цифрой 5.

Средние цифры числа-палиндрома совпадают. Обозначим каждую из них через c. Данное число делится на 3, поэтому его сумма цифр $10 + 2c$ делится на три. Тогда сумма $5 + c$ также делится на 3. Это происходит только при $c = 1$, $c = 4$ и $c = 7$.

Легко видеть, что числа 5115, 5445 и 5775 подходят. □

Критерии

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

5 б. Доказано, что число заканчивается и начинается на пятерку, и без дальнейших обоснований приведён верный ответ.

3 б. Доказано, что число заканчивается и начинается на пятерку, но дальнейших продвижений нет.

2 б. Приведён верный ответ, но отсутствует обоснование.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 4. На координатной плоскости отмечены все точки, у которых обе координаты натуральные и не превосходят 3. За один ход разрешается назвать любые три вещественных числа a, b и c ($a \neq 0$) и удалить все отмеченные точки, которые лежат на графике функции $y = ax^2 + bx + c$. За какое наименьшее число ходов можно удалить все отмеченные точки?

Ответ: за 3 хода.

Решение. Заметим, что на прямой $x = 1$ расположено три отмеченные точки. Каждым ходом мы можем удалить не более одной точки, расположенной на этой прямой, поэтому потребуется не менее трёх ходов.

Осталось показать, как справиться с поставленной задачей за три хода. Для этого рассмотрим графики

$$y = \frac{1}{2}(x-1)(x-2) + 1 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2;$$

$$y = \frac{1}{2}(x-1)(x-2) + 2 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 3;$$

$$y = -(x-1)(x-2) + 3 = -x^2 + 3x + 1.$$

На первом из них лежат точки $(1,1)$, $(2,1)$ и $(3,2)$. На втором — точки $(1,2)$, $(2,2)$ и $(3,3)$. На третьем — точки $(1,3)$, $(2,3)$ и $(3,1)$. □

Критерии

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

3 б. Доказано, что понадобится сделать хотя бы 3 хода, но дальнейших продвижений нет.

3 б. Показано, как за три хода можно удалить все отмеченные точки.

1 б. Приведён верный ответ, но отсутствует обоснование.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 5. В стране есть 20 прямых автотрасс. Любые две автотрассы пересекаются, и на их пересечении расположен город. Через город A проходит семь из этих автотрасс, через город B — четыре, через город C — три, а через каждый из оставшихся городов — по две. Сколько городов в этой стране?

Ответ: 163 города.

Решение. Для каждой пары автотрасс изготовим указатель с названиями этих двух автотрасс, и сложим все указатели на склад. На складе имеется 19 указателей, на которых упомянута первая автотрасса. Заберем их и установим в городах, через которые эта автотрасса проходит. На складе остается 18 указателей, на которых упомянута вторая автотрасса. Заберем их и установим в городах, через которые эта автотрасса проходит. Будем повторять такие действия, пока не расставим все указатели. Легко видеть, что всего использовано

$$19 + 18 + \ldots + 1 = (19 + 1) + (18 + 2) + \ldots + (11 + 9) + 10 = 20 \cdot 9 + 10 = 190$$

указателей.

В городе A сперва было установлено 6 указателей. Затем ещё 5. Потом еще 4 и т. д. Всего в городе A

$$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$$

указатель.

В городе B сперва было установлено 3 указателя. Затем ещё 2, и наконец, ещё 1. Итого $3 + 2 + 1 = 6$ указателей.

В городе C сперва было установлено 2 указателя, а затем ещё 1, итого 3.

Остается ещё $190 - 21 - 6 - 3 = 160$ указателей, причём в каждом из оставшихся городов расположено ровно по одному указателю. Значит, осталось 160 городов. Тогда всего в стране 163 города. □

Критерии

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

1 б. Приведён верный ответ, но отсутствует обоснование.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 6. Биссектрисы углов B и D вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на его диагонали AC. На прямой DA отметили точку E такую, что вершина A является серединой отрезка DE. Докажите, что описанная окружность треугольника DBE касается прямой DC.

Решение. Обозначим точку пересечения биссектрис углов B и D с диагональю AC через L. По свойству биссектрисы

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AL}{LC} = \frac{AD}{DC}.$$

Тогда

$$\frac{DC}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AB}.$$

Заметим, что поскольку четырёхугольник $ABCD$ вписанный, $\angle BAE = \angle BCD$ (рис. 1). Тогда треугольники BAE и BCD подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними. Отсюда следует, что $\angle BEA = \angle BDC$. Тогда описанная окружность треугольника DBE касается прямой DC, что и требовалось доказать. □

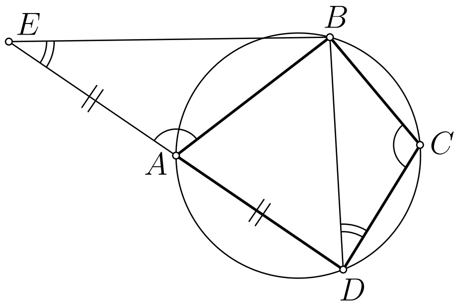


Рис. 1: к решению задачи 6

Критерии

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

3 б. Доказано, что $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$, но дальнейших продвижений нет.

3 б. Задача сведена к тому, что нужно доказать подобие треугольников BAE и BCD.

0 б. Задача не решена или решена неверно.