Всероссийская олимпиада школьников по математике

11 класс

Задача 1. Некто выложил по кругу 2019 карточек. Известно, что среди любых трёх подряд идущих карточек есть по меньшей мере две желтые, а среди любых пяти подряд идущих карточек есть по меньшей мере одна красная. Может ли среди этих карточек присутствовать зелёная?

Ответ: нет, не может.

Решение. Предположим, зелёная карточка есть. Тогда, поскольку среди любых трёх подряд идущих карточек найдутся две жёлтые, слева от зелёной карточки должны лежать две жёлтые и справа от зелёной карточки должны лежать две жёлтые. Но тогда мы нашли пять карт подряд, среди которых нет ни одной красной, что противоречит условию. □

Критерии

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 2. Докажите, что при всех значениях параметра a расстояние между корнями квадратного уравнения

$$x^2 + (2a+1)x + (a^2+a) = 0$$

одно и то же.

Решение. Данное уравнение можно переписать в следующем виде:

$$x^2 + (a+(a+1))x + a(a+1) = 0.$$

Тогда по теореме Виета его корнями являются числа $-a$ и $-(a+1)$, расстояние между которыми равно 1 при всех значениях a. □

Критерии

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

3 б. Верно найден хотя бы один корень уравнения, но дальнейших продвижений нет.

1 б. Верно найдено расстояние между корнями, но отсутствует обоснование.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 3. В Учёном Совете состоит 19 профессоров. Однажды каждый из них написал письма 9 членам совета. После этого оказалось, что каждый получил ровно 9 таких писем. Могло ли оказаться, что никакие два учёных не написали друг другу?

Ответ: да, могло.

Решение. Расположим учёных по кругу. Пусть каждый отправил письма 9 учёным, следующим за ним по часовой стрелке. Тогда каждый получит ровно 9 писем от тех учёных, которые в кругу расположены непосредственно до него. При этом никто не получит письма от того, кому писал сам. □

Критерии

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 4. Натуральное число называется *свободным от кубов*, если ни один из его делителей не является кубом натурального числа, большего единицы. Оля написала на доске 7000 свободных от кубов чисел. Докажите, что по меньшей мере одно из этих чисел имеет простой делитель, больший 20.

Решение. Предположим, что ни одно из чисел Оли не имеет простого делителя, большего 20. Разложим каждое записанное на простые множители. Заметим, что в полученных разложениях используются только простые множители $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$. Причем каждый простой делитель участвует в этих разложениях в нулевой, первой или второй степени, иначе некоторое число Оли будет делиться на куб простого числа, что противоречит условию. Тогда общее количество записанных чисел не превосходит 3^8, поскольку для каждого из восьми имеющихся простых делителей показатель степени в разложении можно выбрать не более чем тремя способами. Но это противоречит условию, поскольку $3^8 < 7000$. □

Критерии

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 5. Внутри треугольника ABC отметили точку P. Луч BP пересекает описанную окружность треугольника в точке R, а луч CP — в точке Q. На стороне AC отметили точку N так, что $\angle CPN = \angle BAQ$. Докажите, что $\angle CRN = \angle BAP$.

Решение. Заметим, что по теореме о вписанном угле $\angle BCQ = \angle BAQ$ (рис. 1). Тогда $\angle BCP = \angle CPN$, откуда следует, что прямые PN и BC параллельны. Тогда $\angle ARB = \angle ACB = \angle ANP$, откуда следует, что четырёхугольник $APNR$ вписанный. Тогда $\angle PAN = \angle PRN$.

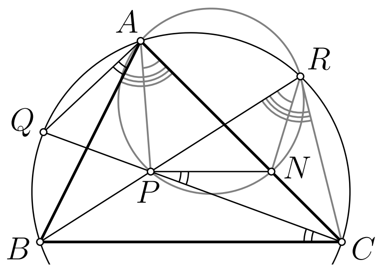

Рис. 1: к решению задачи 5

Остается заметить, что $\angle BAP = \angle BAN - \angle PAN = \angle BRC - \angle BRN = \angle CRN$, что и требовалось доказать. □

Критерии

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

3 б. Доказана вписанность четырёхугольника $APNR$, но дальнейших продвижений нет.

3 б. Задача сведена к тому, что необходимо доказать вписанность четырехугольника $APNR$.

1 б. Доказана параллельность прямых PN и BC, но дальнейших продвижений нет.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 6. Средним геометрическим n натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется величина

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

При каком наибольшем натуральном n среднее геометрическое n различных натуральных чисел, не превосходящих 10, может оказаться натуральным числом?

Ответ: при $n = 4$.

Решение. Оценка. Предположим, $n \geqslant 5$. Пусть среднее геометрическое рассматриваемых чисел равно a. Заметим, что 10! делится на произведение рассматриваемых чисел, т.е. на a^n. Но $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$, откуда следует, что число a и вместе с ним все рассматриваемые числа не могут иметь простых делителей, отличных от двойки. Но среди первых 10 натуральных чисел этому условию соответствуют лишь 4 числа: 1, 2, 4 и 8. Противоречие.

Пример. $6 = \sqrt[4]{3 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}$. □

Критерии

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

5 б. Доказано, что $n < 5$.

2 б. Приведен пример для $n = 4$.

0 б. Приведен верный ответ, но отсутствует обоснование.

0 б. Задача не решена или решена неверно.