Всероссийская олимпиада школьников по математике

7 класс

Задача 1. Существует ли семизначное число, состоящее из различных цифр, в котором произведение первых четырёх цифр равно сумме последних четырёх цифр?

Ответ: Да, существует.

Решение. Например, 1234569. Действительно, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 = 4 + 5 + 6 + 9$. □

Критерии

7 б. Приведён любой, удовлетворяющий условию задачи, пример.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 2. Денис заполняет таблицу 4×4 числами так, чтобы сумма чисел в любых двух соседних по стороне клетках была одинаковой. Андрей заметил, что в нижнем левом углу таблицы стоит 20, а в нижнем правом углу таблицы — 19. Чему равна сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 312.

Решение. Пусть в нижнем ряду таблицы стоят числа 20, a, b и 19:

20	a	b	19

Тогда $a+b = b+19$, откуда $a = 19$. Тогда сумма чисел в любых соседних клетках есть $20 + a = 20 + 19 = 39$. Разобьём нашу доску на 8 прямоугольников 1×2. В каждом из них сумма чисел равна 39, поэтому общая сумма чисел в таблице равна $8 \cdot 39 = 312$.

Комментарий. Нетрудно доказать, что есть только одна подходящая расстановка чисел: если рассмотреть шахматную раскраску таблицы, то на клетках одного цвета стоят числа 19, а на клетках другого — числа 20. □

Критерии

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

5 б. Доказано, что в таблице стоят только числа 20 и 19, но дальнейших продвижений нет.

3 б. Приведён верный ответ, но отсутствует обоснование.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 3. Марина написала 9 подряд идущих натуральных чисел. Марк стёр все чётные числа. Теперь самое первое число в три раза меньше самого последнего. Какое число Марина написала пятым?

Ответ: 6.

Решение. Заметим, что первое и последнее числа Марины имеют одинаковую чётность. Поэтому либо они оба остались, либо оба были стёрты. Также заметим, что разница между крайними оставшимися числами вдвое больше первого из них.

Предположим, первое и последнее числа Марины нечётны. Тогда они и есть крайние оставшиеся числа. Разность между ними вдвое больше первого из них. Эта разность равна 8, поэтому первое число должно быть равно 4. Но мы предположили, что это число нечётно. Противоречие.

Значит, первое и последнее числа Марины чётны. Они оба были стерты, а тогда крайние оставшиеся числа — второе и восьмое. Разность между ними вдвое больше меньшего из них. Эта разность равна 6, поэтому второе число Марины равно 3. Значит, её пятое число равно 6. □

Критерии

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

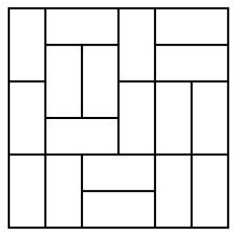
3 б. Верно рассмотрен случай нечетности первого числа.

3 б. Верно рассмотрен случай четности первого числа.

2 б. Приведён верный ответ, но отсутствует обоснование.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 4. Вася выложил из спичек квадрат 6×6, разбитый на прямоугольники 1×2 (все спички имеют длину 1):



Затем он переложил несколько спичек так, что получился квадрат 6×6, разбитый на прямоугольники 1×3 и квадратики 1×1. Сколько прямоугольников 1×3 при этом получилось?

Ответ: 9 прямоугольников 1×3.

Решение. Заметим, что для того, чтобы из исходной Васиной картинки получить квадрат, разбитый на отдельные клеточки, нужно в каждый прямоугольник 2×1 поместить по спичке, т.е. добавить 18 спичек. Для того, чтобы получить такой же квадрат из итоговой Васиной картинки, нужно добавить по две спички в каждый прямоугольник 1×3. Значит, общее число таких прямоугольников равно $18 : 2 = 9$. □

Критерии

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

2 б. Приведён верный ответ, но отсутствует обоснование.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 5. Петя расставил в клетки таблицы 6×6 разноцветные фишки так, что в каждой клетке находится ровно одна фишка, и рядом с каждой фишкой есть хотя бы две фишки того же цвета. (Считается, что две фишки находятся рядом, если они расположены в соседних по стороне клетках). Какое наибольшее количество разноцветных фишек могло быть использовано? (Приведите пример расстановки фишек и докажите, что больше цветов быть не может.)

Ответ: 9.

Решение. Рассмотрим произвольный цвет. Рядом с фишкой данного цвета имеется по меньшей мере две фишки этого цвета. Эти фишки не могут располагаться рядом друг с другом, поэтому должно быть ещё не менее одной фишки рассматриваемого цвета. Итак, фишек каждого цвета не менее четырёх. Тогда цветов не более 9.

Для построения примера разобьём шахматную доску на 9 квадратов 2×2 и в каждом из них расположим четыре фишки одного цвета. Тогда условие задачи выполнено, причем использовано ровно 9 цветов. □

Критерии

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

5 б. Доказано, что цветов не более 9, но дальнейших продвижений нет.

2 б. Приведён пример расстановки фишек 9 цветов, удовлетворяющий условию задачи, но дальнейших продвижений нет.

0 б. Задача не решена или решена неверно.