Всероссийская олимпиада школьников по математике

8 класс

Задача 1. Расставьте в выражении

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6} : \frac{1}{7} = 35$$

скобки таким образом, чтобы получилось верное равенство.

Ответ: Например,

$$\left(\left(\left(\frac{1}{2} : \frac{1}{3}\right) : \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{1}{5} : \frac{1}{6}\right)\right) : \frac{1}{7} = 35.$$

Возможны и другие варианты!

Критерии

7 б. Приведён любой, удовлетворяющий условию задачи, пример.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 2. Клоун Сеня катается на велосипеде, у которого три колеса разных размеров. Среднее колесо вдвое больше маленького, а большое колесо втрое больше маленького. Сеня заметил, что за время поездки маленькое колесо сделало на 3000 оборотов больше, чем среднее. Сколько оборотов сделало за время поездки большое колесо?

Ответ: 2000 оборотов.

Решение. Поскольку маленькое колесо вдвое меньше среднего, оно делает вдвое больше оборотов. Значит, разность между числом оборотов маленького и среднего колес равна числу оборотов среднего колеса. Итак, среднее колесо сделало 3000 оборотов. Тогда маленькое колесо сделало 6000 оборотов. Большое колесо втрое больше малого, поэтому оно сделало втрое меньше оборотов, т. е. число его оборотов равно 2000. □

Критерии

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

3 б. Приведён верный ответ, но отсутствует обоснование.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 3. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отметили точки E и F соответственно. Оказалось, что $BE = EF$. Биссектриса угла EFC пересекает основание AC в точке K. Докажите, что $KF = KC$.

Решение. Обозначим угол ABC через 2α (рис. 1). Треугольник BEF равнобед-

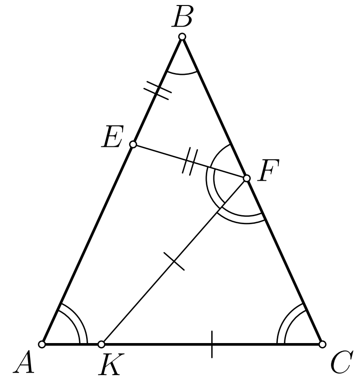

Рис. 1: к решению задачи 3

ренный, поэтому $\angle EFB = 2\alpha$. Тогда $\angle EFK = \angle KFC = 90^\circ - \alpha$. Треугольник ABC равнобедренный, поэтому каждый из углов при его основании также равен $90^\circ - \alpha$. Тогда $\angle KFC = \angle KCF$, откуда $KF = KC$. □

Критерии

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 4. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды встретились трое островитян: Джон, Джим и Джек.

— Джим может сказать, что Джек лжец, — заявил Джон.

— Джек может сказать, что Джон лжец, — заявил Джим.

— Джон может сказать, что Джим лжец, — заявил Джек.

Сколько рыцарей среди них может быть? (Укажите все возможные варианты!)

Ответ: 2 или 0.

Решение. Заметим, что реплика каждого из персонажей равносильна тому, что другие двое принадлежат к разным племенам (так как только в таком случае один абориген может назвать другого лжецом). Ясно, что ситуация с тремя рыцарями невозможна. Также невозможна ситуация с одним рыцарем и двумя лжецами. (Собеседники рыцаря принадлежат к одному племени.) Ситуация с двумя рыцарями и одним лжецом возможна. (При этом собеседники каждого рыцаря из разных племен, а собеседники лжеца — из одного племени.) Также возможна ситуация с тремя лжецами. (Собеседники каждого из лжецов из одного племени.) □

Критерии

- 7 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

- 3 б. Доказано, что все трое не могут быть рыцарями одновременно, но дальнейших продвижений нет.
- 3 б. Доказано, что невозможна ситуация с одним рыцарем и двумя лжецами.
- 0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 5. Петя расставил числа от 1 до 20 по кругу и для каждых трёх подряд идущих чисел вычислил их сумму. Могут ли 11 из 20 этих сумм оказаться равными?

Ответ: нет, не могут.

Решение. Предположим, найдутся 11 равных сумм. Тогда у каждой из 11 троек отметим центральное число. Если бы никакие два отмеченных числа не стояли рядом, то всего чисел было бы не менее 22, что не так. Значит, есть два соседних отмеченных числа. Тогда есть две тройки с равной суммой чисел, у которых есть два общих числа. Но тогда оставшиеся числа из этих троек равны, т. е. в круге есть два равных числа, что противоречит условию. □

Критерии

- 7 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

- 5 б. В решение используется необоснованное утверждение, что среди 11 упомянутых троек найдутся две, имеющие два общих числа. Из этого факта выводится, что 11 равных сумм быть не может.
- 0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 6. В парусном клубе состоит 9 джентльменов. Каждый день клуб выбирает двоих членов для участия в регате. Члены клуба всегда выигрывают и привозят в клубный музей кубок. Через 350 дней правление клуба выяснило, что одна из пар участников заработала больше кубков, чем любая другая. Какое наименьшее число кубков могла добыть для клубного музея эта пара?

Ответ: 8 кубков.

Решение. Заметим, что первый джентльмен участвует в девяти парах, второй джентльмен — в восьми новых парах, третий джентльмен — в семи новых парах, и т. д. Тогда общее число пар равно $9 + 8 + \ldots + 1 = 45$.

Предположим, что лучшая пара заработала не более 7 кубков. Тогда каждая из остальных пар заработала не больше 6 кубков. Значит, общее число кубков не больше чем $44 \cdot 6 + 7 = 271 < 300$, что противоречит условию. Значит, лучшая пара заработала не менее 8 кубков.

Заметим, что ситуация, в которой одна пара заработала 8 кубков, 28 пар заработали по 7 кубков и 16 пар заработали по 6 кубков, подходит под условие. $(1 + 28 + 16 = 45,\ 8 + 28 \cdot 7 + 16 \cdot 6 = 300.)$ □

Критерии

- 7 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

- 5 б. Доказано, что лучшая пара заработала хотя бы 8 кубков, но нет доказательства, что эта ситуация достижима.
- 3 б. Приведен верный ответ, а также показано, что эта ситуация достижима, но нет доказательства минимальности.
- 1 б. Приведён верный ответ, но отсутствует обоснование.
- 0 б. Задача не решена или решена неверно.