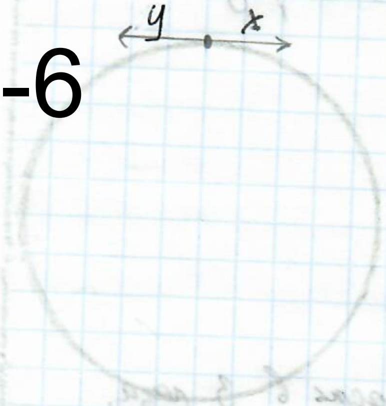
10-6



№1.

(1)

Пусть скорость Андрея : x,
Бориса — y.

Рассмотрим время между двумя встречами:

Т.к. мальчики бегут навстречу друг другу, их скорость сближения равна $x+y$.
Тогда, если длина дорожки — L, время между двумя встречами: $t = \frac{L}{x+y}$

Когда Андрей увеличит скорость в 3 раза:

$$t' = \begin{cases} \frac{L}{3x+y} = \frac{t}{1,5} & (1) \\ \frac{L}{x+y} = t & (2) \end{cases}$$

$$(1):(2): \quad \frac{x+y}{3x+y} = \frac{1}{1,5}$$

$$1,5x + 1,5y = 3x + y$$

$$0,5y = 1,5x$$

$$y = 3x$$

Т.о. $\quad t = \frac{L}{x+y} = \frac{L}{x+3x} = \frac{L}{4x}$

(2) Пусть Борис увеличил скорость в 3 раза!

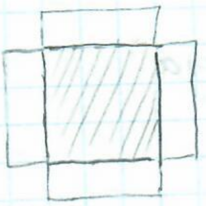
$$t'' = \frac{L}{x+3y} = \frac{L}{x+12x} = \frac{L}{13x}$$

$$\Rightarrow \frac{t''}{t} = \frac{L}{13x} \cdot \frac{4x}{L} = \frac{4}{13}$$

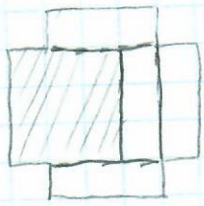
$$\frac{t}{t''} = \frac{13}{4} = 3,25$$

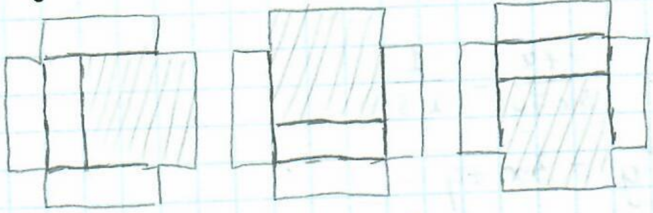
Ответ: Если Борис увеличит скорость в 3 раза, мальчики станут встречаться чаще в 3,25 раза.

№2.



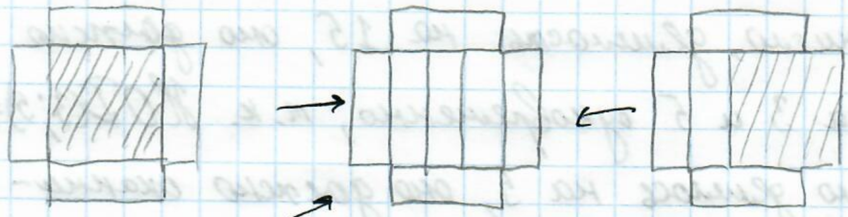
Заметим, что получившуюся фигуру можно сначала разрезать на 4 полоски 3×1 и квадрат 3×3. Это можно сделать 5 способами:

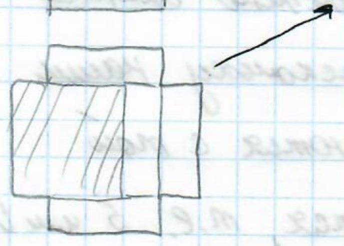




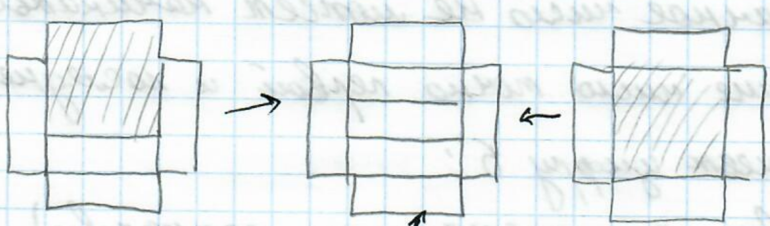
Дальше в каждом случае квадрат можно разрезать на 3 полоски 3×1 2 способами (на 3 вертик. полоски или 3 горизонт. полоски).

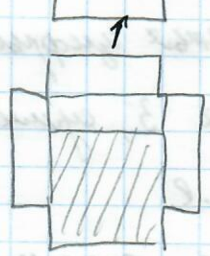
Осталось только учесть одинаковые финальные картинки:





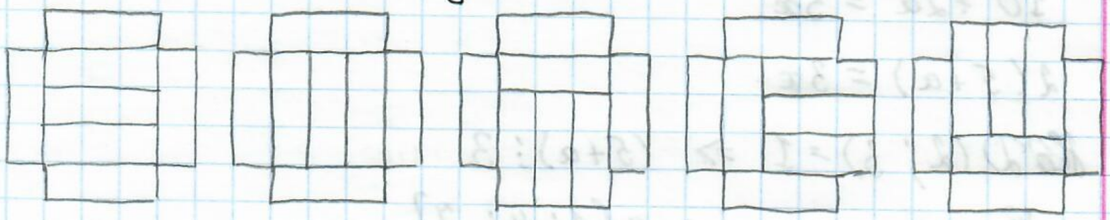
оставляем 1 вариант из 3

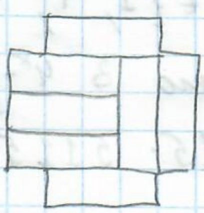




оставляем 1 вариант

Итого всего мы получили 6 способов:





Ответ: 6 способов

④

№3.

Чтобы число делилось на 15, оно должно делиться на 3 и 5 одновременно, т. к. НОД(3; 5) = 1

Чтобы число делилось на 5, оно должно оканчиваться цифрой 5 или 0. Но поскольку наши числа - палиндромы, они начинаются той же цифрой, которой оканчиваются, т.е. 5 или 0. А т.к. 4ˣ-значное число не может начинаться на 0, то наше число точно первой и последней цифрами имеет цифру 5!

$5\underline{a}\,\underline{a}5$ (вторая и третья цифры одинаковые)

Чтобы число делилось на 3, сумма его цифр должна делиться на 3, т.е.

$5 + a + a + 5 = 3x$, где a - однозн. число (2и 3 цифры)

$10 + 2a = 3x$

$2(5+a) = 3x$

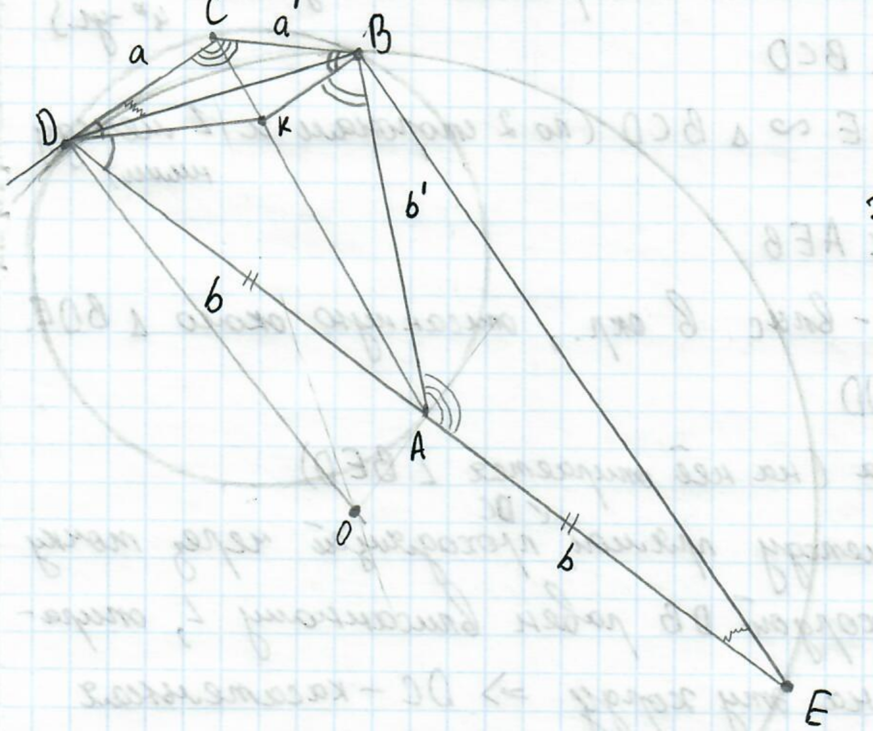
$НОД(2; 3) = 1 \Rightarrow (5+a) ⋮ 3$

Нам подходят: $a \in \{1; 4; 7\}$

Т.о. существует всего 3 4ˣ-значных числа-палиндрома, делящихся на 15: 5115; 5445; 5775.

Ответ: 3 числа (5115; 5445; 5775)

№6.



Д-ть: $OD \perp DC$

Д-во:

1) Рассмотрим $\triangle ADC$:

$\frac{DC}{AD} = \frac{CK}{AK}$ - св-во биссектрисы

$\frac{a}{b} = \frac{CK}{AK}$

2) Рассмотрим $\triangle ABC$:

$\frac{CB}{AB} = \frac{CK}{AK}$ - св-во биссектр.

$\Rightarrow \frac{a'}{b'} = \frac{CK}{AK}$

Т.о. $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ или $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$

3) Рассмотрим $\triangle ABE$ и $\triangle CBD$:

$\frac{CD}{AE} = \frac{CD}{AD} = \frac{a}{b}$

$\frac{BC}{AB} = \frac{a'}{b'}$

$\Rightarrow \frac{CD}{AE} = \frac{BC}{AB}$

⑥ $\angle BAE = 180^\circ - \angle BAD$ (смежные)

$\angle BCD = 180^\circ - \angle BAD$ (противолежащие во впи-
4х-уг.)

$\Rightarrow \angle BAE = \angle BCD$

Т.о. $\triangle BAE \sim \triangle BCD$ (по 2 сторонам и $\angle$ между ними)

$\Rightarrow \angle CDB = \angle AEB$

4) $\angle BED$ - впис. в окр., описанную около $\triangle BDE$.

$DC \cap BD = (\cdot) D$

BD - хорда (на неё опирается $\angle BED$)

Т.о. угол между прямой DC, проходящей через точку $(\cdot) D$ на окр., и хордой DB равен вписанному $\angle$, опирающемуся на эту хорду $\Rightarrow DC$ - касательная (по т. об угле между касательной и хордой) к окр., описанной возле $\triangle BDE$ #.

№5.

Максимальное число городов достигалось бы, если никакие 3 прямые автотрассы не пересекались бы в 1 точке, и оно было бы равно C_{20}^2. Но у нас 7 дорог пересекаются в $(\cdot) A$, то есть вместо максимального числа пересечений этих семи дорог, мы имеем 1, т.о. число городов уменьшается на C_7^2-1. Ещё 4 дороги пересекаются в (·) B, т.е. число городов уменьшается ещё на C_4^2-1. А т.к. 3 дороги пересекаются в т. C, от максимально возможного кол-ва городов нужно отнять ещё C_3^2-1.

Т.о. чтобы вычислить число городов в стране, нужно из максимально возможного числа городов (C_{20}^2) вычесть C_7^2-1 (число городов, которое мы „теряем", когда 7 попарно пересекающихся прямых, из которых никакие 3 не пересекаются в 1 т., превращаем в 7 прямых, пересекающихся в 1 (·) A), C_4^2-1 (потеря городов при превращении 4 попарно пересек. прямых, любые 3 из которых не пересек. в 1 (·), в 4 прямые, пересекающиеся в 1 (·) B) и C_3^2-1 (потеря городов при превращении 3 прямых, попарно пересекающихся, но не проходящих через 1 т., в 3 прямые, проходящие все через 1 точку C). Итого:

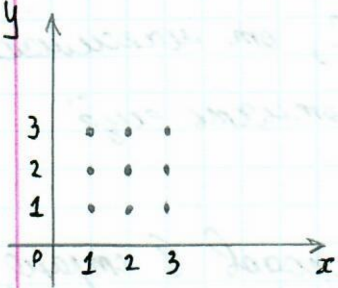
$$C_{20}^2-(C_7^2-1)-(C_4^2-1)-(C_3^2-1)=C_{20}^2-C_7^2-C_4^2-C_3^2+3=$$

$$=\frac{20!}{2!18!}-\frac{7!}{2!5!}-\frac{4!}{2!2!}-\frac{3!}{2!1!}+3=\frac{19\cdot\overset{10}{\cancel{20}}}{\cancel{2}}-\frac{6\cdot7}{2}-\frac{3\cdot\overset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{2}}-3+3=$$

(8) $= 190 - 21 - 6 = 163$

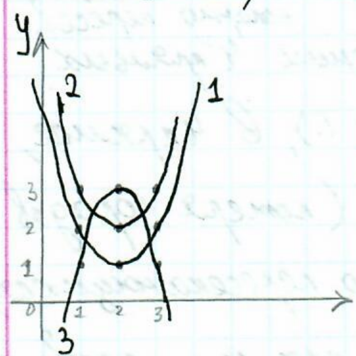
Ответ: 163 города.

№4.



Заметим, что никакая парабола не может проходить через 4 из отмеченных точек, т. к. в таком случае хотя бы у 2 точек оказалась одна и та же абсцисса (по принципу Дирихле), чего быть не может. Значит за 1 ход у нас получится стереть не более 3 точек, т. е. нам понадобится хотя бы 3 хода.

Покажем, что 3 ходов достаточно:



1: $y = x^2 - 4x + 5$ $(a=1; b=-4; c=5)$

2: $y = x^2 - 4x + 6$ $(a=1; b=-4; c=6)$

3: $y = -2x^2 + 8x - 5$ $(a=-2; b=8; c=-5)$

Ответ: 3 хода.